

40 Years of Calculus in $4 + \epsilon$ Dimensions

Wolfgang Bietenholz^a and Lilian Prado^b

^a Instituto de Ciencias Nucleares
 Universidad Nacional Autónoma de México
 A.P. 70-543, C.P. 04510 Distrito Federal, Mexico

^b Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
 Puebla, Pue., Mexico

Quantum Field Theory is the successful formalism for particle physics. Analytical calculations in this framework usually apply a *perturbation expansion*, *i.e.* one starts from free particles and computes corrections, order by order in the interaction parameter. This involves numerous divergent terms, which need to be *regularized* in a subtle way, such that the physical limit can be taken in a controlled manner at the very end.

40 years ago a new method was established for this purpose, known as the **Dimensional Regularization**. It was the essential tool for the revolution in theoretical particle physics in the early 1970s, which led to the Standard Model that we all refer to today. However, not everybody is aware that the origin of this regularization scheme was in Latin America, more precisely in *La Plata, Argentina*.

In 1970 Quantum Field Theory was already established as the appropriate formalism for elementary particles. This was based on the success of Quantum Electrodynamics (QED), where electrically charged particles interact through the Abelian gauge group $U(1)$. The idea to extend gauge theory to non-Abelian Lie groups, like $SU(2)$, was also known, and denoted as *Yang-Mills theories*. In particular, this was required for the proposal to unify electromagnetic and weak interactions [1]. However, such theories seemed to be “non-renormalizable”; it was not known how to compute finite and predictive results. The regularization schemes that were used at that time to handle the divergences (like the Pauli-Villars method) failed for Yang-Mills theories.

However, in 1971 Gerard 't Hooft, a brilliant Ph.D. student in Utrecht (Netherlands), formulated a program of how to make sense out of such theories, if a suitable regularization scheme would be available [2]. In partic-

ular, gauge invariance should be preserved on the regularized level. Meanwhile physicists thought about new schemes in many countries, including *Argentina*.

A remarkable development had taken place at the Universidad de Buenos Aires (UBA) in the late 1950s: a young professor named **Juan José Giambiagi** became the head of the Physics Department from 1957 to 1966; under his direction it expanded, gained worldwide reputation and attract highly motivated students. Among them was M.A. Virasoro, who is now famous for the *Virasoro Algebra*. Together with his long-term collaborator **Carlos Guido Bollini**, Giambiagi was particularly interested in applications of *distributions* (or *generalized functions*) to particle physics. They studied thoroughly the books by I.M. Gel'fand and G.E. Shilov, in particular the first volume [3]. Still in his older age Giambiagi called it “my bible”, and he was convinced that it contained a great potential for the physics of the future. In 1964 Bollini and Giambiagi — together with A. González Domínguez, a mathematician who had supervised Giambiagi’s Ph.D. thesis — suggested a new scheme that they called Analytic Regularization, which works in QED [4]. Ref. [5] discusses mathematical aspects of the renormalization in this scheme.

In 1966 a *coup d'état* brought General Onganía to power. He stopped university autonomy, which had been recognized in Argentina since 1919. In protest, students and professors occupied five faculties of UBA, which were violently cleared by the Federal Police, arresting hundreds of persons and destroying laboratories and libraries, in the “Noche de los Bastones Largos” (July 29). The subsequent repression led to the resignation of about 1500 lecturers [6]. Also the excellent Physics Department fell into ruin, despite a public letter of support, which was signed by 192 renowned physicists, including six Nobel laureates at that time, and eight future ones.

Bollini and Giambiagi moved south-east to La Plata, where they worked from 1968 to 1976. Despite difficult working conditions, it turned out to be their most productive period. Gifted students from UBA joined, among them F. Schaposnik, who is now a renowned leader in Argentinian high energy physics. In 1971 Bollini and Giambiagi came up with a new idea of how to regularize the divergences in perturbative Quantum Field Theory, which truly surprised many people: they calculated in $4 + \epsilon$ *space-time dimensions*. They arrived at finite results by analytic continuation in ϵ all over the complex plane, up to poles at $\epsilon = -2, 0, 2, 4, \dots$. The limit $\epsilon \rightarrow 0$ should be



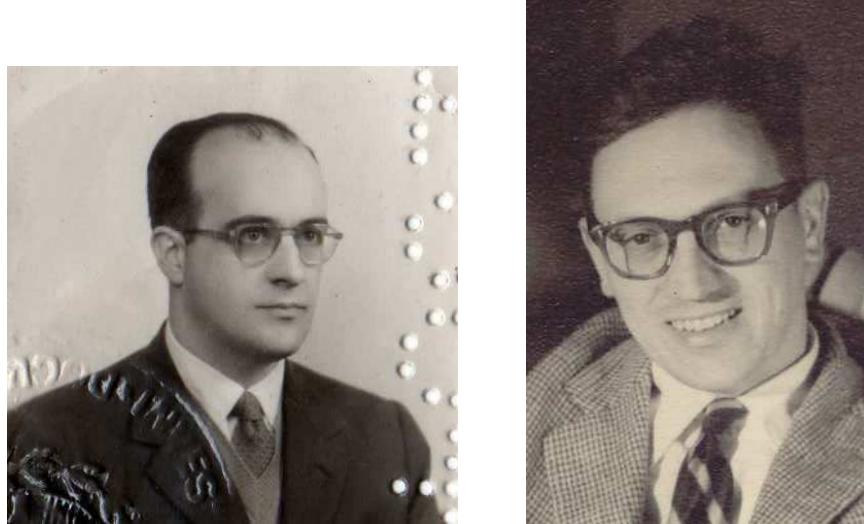
Pictures of the *Noche de los Bastones Largos* (“Night of the Long Batons”), Universidad de Buenos Aires, July 29, 1966.

taken at the very end. They first applied this method to scalar (spin-less) particles. In November 1971 they submitted an article to the well-reputed journal *Physics Letters B*, which belongs to the Dutch publishing house *Elsevier*. However, the editors and referees found this approach too surprising and blocked its publication. Giambiagi commented later ironically that it was rejected “because we didn’t know that the space-time dimension is 4”.

Hence Bollini and Giambiagi wrote another article about their new approach, now more extensive and with applications to QED, where they demonstrated gauge invariance. They sent it to the Italian journal *Il Nuovo Cimento B*, where it arrived on February 18, 1972. There it was accepted, but it took until November to get published [7].

Meanwhile, on February 21, 't Hooft and his Ph.D. advisor Martinus Veltman submitted an article to *Nuclear Physics B* (another journal that belongs to *Elsevier*), which suggested the same regularization procedure. Their work was more extensive, and it contained applications to Yang-Mills theories, which can be successfully renormalized in this way. That article was published swiftly, on July 1 [8]. About a month later also the original Argentinian work finally appeared in *Physics Letters B* [9].

Thus the Dutch paper was first to be published, due to the handling by the editors, although it was submitted later. It is generally viewed as an independent work, a little later than the one from Argentina, but much more comprehensive. However, it is a matter of fact that 't Hooft and Veltman already knew the second article from La Plata, since they quoted it as a preprint. A further delicate detail is that Veltman was a member of the Ad-



Carlos Guido Bollini (1926 - 2009, on the left) and Juan José Giambiagi (1924 - 1996, on the right), the two Argentinian physicists who invented Dimensional Regularization in 1971.

visory Editorial Board of *Physics Letters B* during that time.

Now Dimensional Regularization led to a revolution in particle physics: the *electroweak unification* was shown to work, and it was also confirmed experimentally: in 1973 CERN observed the neutral weak current that had been predicted, and later it also identified all three massive weak gauge bosons. Also in 1973 *Quantum Chromodynamics* (QCD) was elaborated [10]. It is again based on a Yang-Mills theory, this time with the gauge group $SU(3)$. The strong interaction is transmitted by 8 gluons, corresponding to the 8 generators of $SU(3)$, and they interact among each other, as the non-commutativity of these generators reveals. In the same year, the QCD property of *asymptotic freedom* was understood [11], which led to a perfectly consistent picture of the hadronic world. Thus the Standard Model of particle physics was established. It holds to high precision to the present (if neutrino masses are incorporated), and it is likely that CERN has just discovered the Higgs particle as its last ingredient.

On the other hand, in 1976 Argentina suffered from another military *coup* and the beginning of the Dirty War. This also affected the Universidad de

La Plata: Giambiagi was interrogated by the Federal Police about links to an alleged Jewish or communist conspiracy [6]. He and Bollini both escaped to Rio de Janeiro, where they soon worked at the *Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas* (CBPF). Giambiagi was the head of its Particle Physics Department from 1978 to 1985. One year later he became director of the Centro Latinoamericano de Física (CLAF), which he had founded back in 1960 with two prominent colleagues from Brazil and Mexico: José Leite Lopes and Marcos Moshinsky. Giambiagi encouraged young scientists at CLAF to address also subjects of practical relevance, such as energy resources and climatic issues [6]. He stayed in Rio de Janeiro until he passed away in 1996. Bollini returned to Argentina — after the military regime had ended — where he lived until 2009.



Carlos Guido Bollini (on the left) and Juan José Giambiagi (on the right), after their escape to Brazil.

In 1999 't Hooft and Veltman received the Physics Nobel Prize. In particular 't Hooft certainly deserved it for numerous important works. However, the official press release only referred to four papers: the most cited among them is the one where Dimensional Regularization was re-invented and applied to Yang-Mills theories [8]. The Swedish Royal Academy mentioned the names of 15 other researchers who had done related work, but it ignored the Argentinian contribution [12]. Only the Nobel lecture by Veltman contains a side-remark about “the independent work of Bollini and Giambiagi”, though

it is not included in his list of references [13].



Gerard 't Hooft (on the left) and Martinus Veltman (on the right), Nobel Prize winners of 1999, “for elucidating the quantum structure of electroweak interactions in physics”.

To this day, the paper by 't Hooft and Veltman on Dimensional Regularization has 2929 citations (according to <http://inspire.net/>), whereas the two articles from La Plata have 298 and 579 citations, respectively. This is also considerable, but only little compared to the immense impact of Dimensional Regularization, which is now the standard method in perturbative calculations, explained in the Quantum Field Theory text books, and which was essential for the breakthrough of the Standard Model.

It still happens often that papers and seminar speakers refer to this scheme, quoting only 't Hooft and Veltman — also here in Mexico. We hope for this article to counteract a little. At last we congratulate the Dimensional Regularization to its 40 years of existence as a highly successful procedure — and 41 years since it was invented in La Plata.

It is a pleasure to thank Ernesto Bollini, Marcia Giambiagi, José Helayël-Neto, Mario Rocca and Fidel Schaposnik for helpful communications.

References

- [1] L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579-588. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264-1266. A. Salam, in Proc. of the 8th Nobel Symposium on “Elementary particle theory, relativistic groups and analyticity”, ed. N. Svartholm (1969) p. 367-377.
- [2] G. ’t Hooft, *Nucl. Phys.* **B33** (1971) 173-199; *Nucl. Phys.* **B35** (1971) 167-188.
- [3] I.M. Gel’fand and G.E. Shilov, “Generalized Functions, volume 1: Properties and Operations”, Academic Press, New York (1964).
- [4] C.G. Bollini, J.J. Giambiagi and A. González Domínguez, *Nuovo Cim.* **31** (1964) 550-561.
- [5] E.R. Speer, *Commun. Math. Phys.* **23** (1971) 23-36.
- [6] D. Bes, “Juan José Giambiagi” in Conferencia “La Física del Siglo XX a Vuelo de Pájaro”, Universidad de Buenos Aires (1996). F.A. Schaposnik, “Un físico argentino”, Artículo en memoria de J.J. Giambiagi, in *Perfis*, eds. F. Caruso y A. Troper, CBPF-CNPq, Brasil, 1997; “Sobre el Premio Nobel de Física 1999”, *Ciencia Hoy* **10** No. 55 (2000).
- [7] C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, *Nuovo Cim.* **12B** (1972) 20-26.
- [8] G. ’t Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44** (1972) 189-213.
- [9] C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, *Phys. Lett.* **40B** (1972) 566-568.
- [10] H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **47B** (1973) 365-368.
- [11] D.J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1343-1346. H.D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346-1349.
- [12] C. Jarlskog, “Background information on the 1999 Nobel Prize in Physics”, www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1999/advanced-physicsprize1999.pdf
- [13] M. Veltman, *Rev. Mod. Phys.* **72** (2000) 341-349.

40 Años de Cálculo en $4 + \epsilon$ Dimensiones

Wolfgang Bietenholz^a y Lilian Prado^b

^a Instituto de Ciencias Nucleares
Universidad Nacional Autónoma de México
A.P. 70-543, C.P. 04510 Distrito Federal, México

^b Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Puebla, Pue., México

La *Teoría Cuántica de Campos* es el formalismo exitoso de la física de partículas. Los cálculos analíticos en este marco de trabajo aplican generalmente la *expansión perturbativa*; es decir, se realizan cálculos iniciando con partículas libres y se llevan a cabo correcciones, de orden en orden, en el parámetro de interacción. Esto involucra numerosos términos divergentes los cuales requieren de una *regularización* refinada, de manera que se llegue al final a un límite físico controlado.

Hace 40 años se estableció un método nuevo para este fin, conocido como la **Regularización Dimensional**. Dicho método fue la herramienta esencial para la revolución de la física teórica de partículas acontecida al principio de los años 1970s, que proporcionó el Modelo Estándar al que todos nos referimos hoy en día. Sin embargo, no todos están conscientes de que el origen de este esquema de regularización está en América Latina; más específicamente en *La Plata, Argentina*.

En 1970 la Teoría Cuántica de Campos ya se había establecido como el formalismo apropiado para las partículas elementales. Esto se basó en el éxito de la Electrodinámica Cuántica (QED por sus siglas en inglés), donde las partículas con carga eléctrica interactúan a través del grupo de norma abeliano $U(1)$. La idea de extender las teorías de norma a grupos de Lie no abelianos, como $SU(2)$, también era conocida y denotada como *teorías de Yang-Mills*. En particular, estas teorías se requerían para unificar la interacción electromagnética y débil [1]. Sin embargo, tales teorías parecían ser “no renormalizables”; no se conocía una forma de obtener resultados finitos y predictivos. Los esquemas de regularización que habían sido utilizados en este tiempo en el manejo de divergencias (como el método de Pauli-Villars) fallaban ante las teorías de Yang-Mills.

Sin embargo, en 1971, Gerard 't Hooft, un brillante estudiante de doctorado en Utrecht (Países Bajos), formuló un programa para que dichas teorías cobraran sentido en caso de que se encontrara un esquema de regularización adecuado [2]. En particular, la invariancia de norma debía preservarse ante la regularización. Mientras tanto, físicos investigaban nuevos esquemas en muchos países, incluyendo *Argentina*.

Al final de los años 1950s, en la Universidad de Buenos Aires (UBA) se había logrado un desarrollo notable. Un joven profesor de nombre **Juan José Giambiagi** se desempeñaba como jefe del Departamento de Física entre 1957 y 1966. Bajo su dirección, el departamento se expandió, obtuvo reconocimiento mundial y atrajo estudiantes altamente dotados. Entre ellos se encontraba M.A. Virasoro, quien ahora es célebre por el *Algebra de Virasoro*. Junto con su asiduo colaborador **Carlos Guido Bollini**, Giambiagi estaba interesado en especial por aplicaciones de *distribuciones* (o *funciones generalizadas*) sobre la física de partículas. Ellos estudiaron a profundidad los libros de I.M. Gel'fand y G.E. Shilov, en particular el primer volumen [3]. Aún en edad avanzada, Giambiagi lo llamaba “mi biblia”, y estaba convencido de que contenía un gran potencial para la física del futuro. En 1964, Bollini y Giambiagi junto con A. González Domínguez, el matemático director de tesis doctoral de Giambiagi, sugirieron un nuevo esquema al que llamaron Regularización Analítica, el cual puede ser aplicado en QED [4]. Ref. [5] analiza aspectos matemáticos de la renormalización en este esquema.

En 1966 un golpe de estado llevó al poder al General Onganía. Él negó la autonomía universitaria que había sido reconocida en Argentina desde 1919. En señal de protesta, estudiantes y profesores ocuparon cinco facultades de la UBA, que fueron violentamente desalojados por la Policía Federal, arrestando a cientos de personas y destruyendo laboratorios y bibliotecas en la llamada “Noche de los Bastones Largos” (29 de julio). La represión subsecuente llevó a la renuncia a cerca de 1500 docentes [6]. También el excelente Departamento de Física cayó en la ruina, a pesar de una carta a la opinión pública respaldada por 192 personalidades renombradas del mundo de la Física, incluidos seis premios Nobel laureados hasta ese momento, y ocho premios posteriores.

Bollini y Giambiagi se mudaron al sureste a La Plata, donde trabajaron de 1968 a 1976. A pesar de las difíciles condiciones de trabajo, éste resultó ser su periodo más productivo. Notables estudiantes de la UBA se unieron a ellos, entre los que se encontraba F. Schaposnik, quien en la actualidad es un

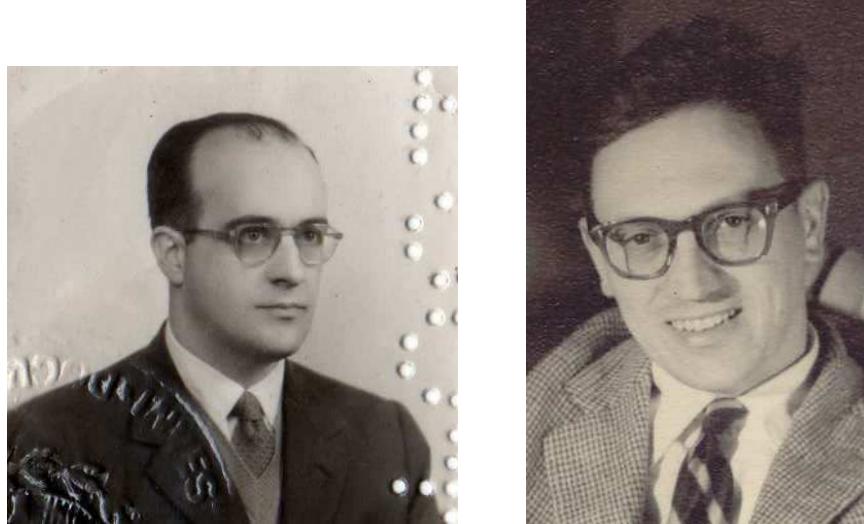


Imágenes de la Noche de los Bastones Largos, Universidad de Buenos Aires, 29 de julio, 1966.

reconocido líder de la física de altas energías en Argentina. En 1971, Bollini y Giambiagi innovaron con otra idea sobre cómo regularizar divergencias en la Teoría Cuántica de Campos perturbativa, que tomó a muchos por sorpresa: calcular en un *espacio-tiempo de $4 + \epsilon$ dimensiones*. De esta manera lograron llegar a resultados finitos por medio de la continuación analítica de ϵ en todo el plano complejo, hasta polos en $\epsilon = -2, 0, 2, 4 \dots$. El límite $\epsilon \rightarrow 0$ debe ser considerado al final del cálculo. Inicialmente aplicaron este método a partículas escalares (sin espín). En noviembre de 1971 sometieron un artículo a la reconocida revista *Physics Letters B*, la cual pertenece a la casa editorial holandesa *Elsevier*. Sin embargo, a los editores y árbitros dicha aproximación les pareció demasiado sorprendente y bloquearon su publicación. Tiempo después Giambiagi comentó con ironía que había sido rechazado “porque no sabíamos que la dimensión del espacio-tiempo es 4”.

Consecuentemente, Bollini y Giambiagi escribieron otro artículo sobre su nueva aproximación, más extenso y con aplicaciones a la QED, donde demostraban la invariancia de norma. Lo enviaron a la revista italiana *Il Nuovo Cimento B*, la cual lo recibió el 18 de febrero de 1972. Ahí fue aceptado, pero su publicación tuvo que esperar hasta noviembre [7].

Entre tanto, el 21 de febrero, 't Hooft y su director de doctorado Martinus Veltman enviaron un artículo a *Nuclear Physics B* (otra revista de la casa *Elsevier*), el cuál sugería el mismo proceso de regularización. Su trabajo era más extenso e incluía aplicaciones a las teorías de Yang-Mills, las cuales se renormalizan exitosamente de esta manera. Tal artículo fue publicado rápidamente, el 1º de julio [8]. Cerca de un mes después, finalmente también



Carlos Guido Bollini (1926 - 2009, a la izquierda) y Juan José Giambiagi (1924 - 1996, a la derecha), los dos físicos argentinos que inventaron la Regularización Dimensional en 1971.

el trabajo argentino original apareció en *Physics Letters B* [9].

Por lo tanto, el artículo holandés fue publicado primero debido al manejo de los editores, a pesar de que fue entregado después. Generalmente se le ve como un trabajo independiente, ligeramente posterior al argentino, pero mucho más completo. No obstante, es un hecho que 't Hooft y Veltman ya conocían el segundo artículo de La Plata, pues lo citaron como un *preprint*. Otro detalle delicado es que el mismo Veltman era miembro del *Advisory Editorial Board* de *Physics Letters B* durante este periodo.

Ahora la Regularización Dimensional conducía a una revolución en la física de partículas. Se mostraba que la *unificación electrodébil* sí funciona. Fue comprobada experimentalmente en el CERN cuando en 1973 se observó la corriente neutra débil predicha, y posteriormente se identificaron los tres bosones de norma masivos débiles. Además, en 1973 se desarrolló la *Cromodinámica Cuántica* (QCD por sus siglas en inglés) [10]. Ésta se basa nuevamente en una teoría de Yang-Mills, en este caso con el grupo de norma $SU(3)$. La interacción fuerte se transmite por medio de 8 gluones, que corresponden a los 8 generadores de $SU(3)$, e interactúan entre ellos, tal como lo revela la no-commutatividad de dichos generadores. En este mismo año,

también la propiedad de *libertad asintótica* de QCD logró comprenderse [11], lo cual llevó a una imagen perfectamente consistente del mundo hadrónico. De esta manera, el Modelo Estándar de las partículas elementales quedó establecido. Actualmente este Modelo está comprobado con gran precisión (si se incorporan las masas de los neutrinos), y es probable que el CERN haya descubierto hace poco su último ingrediente, la partícula de Higgs.

Por otro lado, en 1976 Argentina sufrió otro golpe de estado y el principio de la Guerra Sucia. Esto afectó también a la Universidad de La Plata; Giambiagi fue interrogado por la Policía Federal sobre un supuesto vínculo con alguna conspiración judía o comunista [6]. Él y Bollini escaparon a Río de Janeiro, donde pronto se incorporaron al *Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas* (CBPF). Giambiagi fungió como jefe del Departamento de Física de Partículas entre 1978 y 1985. Un año después fue designado director del Centro Latinoamericano de Física (CLAF), el cual había fundado en 1960 junto con dos prominentes colegas de Brasil y México: José Leite Lopes y Marcos Moshinsky. Giambiagi motivó a científicos jóvenes en el CLAF a considerar también temas de relevancia práctica, tales como recursos energéticos y retos climáticos [6]. Permaneció en Río de Janeiro hasta su muerte en 1996. Por su parte, Bollini volvió a Argentina después de que el régimen militar había terminado, y vivió ahí hasta 2009.



Carlos Guido Bollini (a la izquierda) y Juan José Giambiagi (a la derecha), después de su huida a Brasil.

En 1999 't Hooft y Veltman recibieron el Premio Nobel de Física. En particular, 't Hooft ciertamente lo merecía por numerosos trabajos muy relevantes. Sin embargo, el comunicado de prensa oficial sólo se refiere a cuatro publicaciones; la más citada entre ellas es la que re-inventó la Regularización Dimensional y la aplicó a las teorías de Yang-Mills [8]. La Real Academia de Suecia mencionó los nombres de otros 15 investigadores quienes realizaron trabajos relacionados, pero ignoró la contribución argentina [12]. Únicamente la conferencia del Nobel de Veltman contiene un comentario al margen sobre “el trabajo independiente de Bollini y Giambiagi”, aunque no está incluído en su lista de referencias [13].



Gerard 't Hooft (a la izquierda) y Martinus Veltman (a la derecha), premios Nobel 1999, “por elucidar la estructura cuántica de la interacción electrodébil en física”.

Hasta la fecha, el artículo de 't Hooft y Veltman sobre Regularización Dimensional tiene 2929 citas (de acuerdo a <http://inspire.net/>), mientras que los dos artículos de La Plata tienen 298 y 579 citas, respectivamente. Estas cantidades también son considerables; sin embargo, es poco comparado con el inmenso impacto de esta innovación. La Regularización Dimensional es ahora el método estándar en el cálculo perturbativo, explicado en los libros de texto sobre Teoría Cuántica de Campos, y fue esencial para el desarrollo del Modelo Estándar.

Aún ocurre con frecuencia que artículos y expositores de seminarios se refieren a este esquema, citando únicamente a 't Hooft y Veltman - inclusive en México. Esperamos que este artículo contrarreste un poco este hecho.

Finalmente, felicitamos a la Regularización Dimensional por sus 40 años de existencia como un método altamente exitoso, y 41 años desde su invención en La Plata.

Es un placer agradecer a Ernesto Bollini, Marcia Giambiagi, José Helayél-Neto, Mario Rocca y Fidel Schaposnik por su valiosa comunicación.

Referencias

- [1] L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579-588. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264-1266. A. Salam, en *Proc. of the 8th Nobel Symposium on “Elementary particle theory, relativistic groups and analyticity”,* ed. N. Svartholm (1969) p. 367-377.
- [2] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B33** (1971) 173-199; *Nucl. Phys.* **B35** (1971) 167-188.
- [3] I.M. Gel'fand y G.E. Shilov, “Generalized Functions, volume 1: Properties and Operations”, Academic Press, New York (1964).
- [4] C.G. Bollini, J.J. Giambiagi y A. González Domínguez, *Nuovo Cim.* **31** (1964) 550-561.
- [5] E.R. Speer, *Commun. Math. Phys.* **23** (1971) 23-36.
- [6] D. Bes, “Juan José Giambiagi” en Conferencia “La Física del Siglo XX a Vuelo de Pájaro”, Universidad de Buenos Aires (1996). F.A. Schaposnik, “Un físico argentino”, Artículo en memoria de J.J. Giambiagi, *Perfis*, eds. F. Caruso y A. Troper, CBPF-CNPq, Brasil, 1997; “Sobre el Premio Nobel de Física 1999”, *Ciencia Hoy* **10** No. 55 (2000).
- [7] C.G. Bollini y J.J. Giambiagi, *Nuovo Cim.* **12B** (1972) 20-26.
- [8] G. 't Hooft y M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44** (1972) 189-213.
- [9] C.G. Bollini y J.J. Giambiagi, *Phys. Lett.* **40B** (1972) 566-568.
- [10] H. Fritzsch, M. Gell-Mann y H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **47B** (1973) 365-368.

- [11] D.J. Gross y F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1343-1346. H.D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346-1349.
- [12] C. Jarlskog, “Background information on the 1999 Nobel Prize in Physics”,
www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1999/advanced-physicsprize1999.pdf
- [13] M. Veltman, *Rev. Mod. Phys.* **72** (2000) 341-349.